

Stygnięcie ciała

Problem

Ciało o temperaturze początkowej T_0 umieszczono w chwili $t_0 = 0$ w pomieszczeniu chłodniejszym o stałej temperaturze T_s , na skutek czego ciało zaczyna stygnąć.

Znaleźć temperaturę $T(t)$ tego ciała w dowolnej chwili $t > 0$.

Wiadomo, że prędkość stygnięcia ciała $\frac{dT}{dt}$ jest wprost proporcjonalna do różnicy temperatur ciała stygnącego i pomieszczenia, w którym ciało się znajduje.

Zatem

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - T_s) \quad (1)$$

gdzie: k jest dodatnim współczynnikiem, stałym w danych warunkach.

Równanie (1) jest równaniem różniczkowym z funkcją niewiadomą $T(t)$. Dzieląc oboje strony równania przez $T - T_s$ i mnożąc przez dt otrzymamy:

$$\frac{dT}{T - T_s} = -k dt \quad (2)$$

Całkując równanie (2) otrzymamy kolejno:

$$\int \frac{dT}{T - T_s} = \int -k dt$$

$$\ln |T - T_s| = -kt + \ln C$$

$$\ln(T - T_s) - \ln C = -kt$$

$$\frac{T - T_s}{C} = e^{-kt}$$

$$T - T_s = C \cdot e^{-kt}$$

$$\text{Zatem } T = T_s + C \cdot e^{-kt} \quad (3)$$

Ostatnie równanie to całka ogólna równania (1).

Ponieważ temperatura zmienia się w sposób ciągły, otrzymujemy warunek początkowy

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} T(t) = T(0) = 0$$

Stąd uwzględniając równanie (3) znajdujemy: $T_0 = T_s + C \cdot e^{-kt} |_{t=0}$

$$\text{Czyli } T_0 - T_s = C.$$

Wstawiając obliczoną wartość C do równania (3) otrzymujemy:

$$T(t) = T_s + (T_0 - T_s) \cdot e^{-kt} \quad (4)$$

Równanie (4) jest całką szczególną równania (1).

Jeśli znana jest (na przykład na skutek pomiaru) temperatura ciała T_1 w pewnej chwili $t_1 > 0$, to możemy policzyć wartość współczynnika k .

Jeśli zatem $T(t_1) = T_1$, to na podstawie wzoru (4) możemy napisać:

$$T_1 = T_s + (T_0 - T_s) \cdot e^{-kt_1}$$

$$T_1 - T_s = (T_0 - T_s) \cdot e^{-kt_1}$$

$$\frac{T_1 - T_s}{T_0 - T_s} = e^{-kt_1}$$

Logarytmując obustronnie otrzymamy:

$$\ln \left(\frac{T_1 - T_s}{T_0 - T_s} \right) = -kt_1$$

Obliczając k otrzymujemy:

$$-k = \frac{1}{t_1} \cdot \ln \left(\frac{T_1 - T_s}{T_0 - T_s} \right)$$

$$\text{Czyli } k = -\frac{1}{t_1} \cdot \ln \left(\frac{T_1 - T_s}{T_0 - T_s} \right)$$

Znając k możemy za pomocą wzoru (4) obliczyć temperaturę ciała w dowolnej chwili $t > 0$.